数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 161-174

有限群上の丹原関手に対する代数的操作
(SOME ALGEBRAIC OPERATIONS ON TAMBARA FUNCTORS ON FINITE GROUPS)

HIROYUKI NAKAOKA (中岡 宏行)

Department of Mathematics and Computer Science,
Kagoshima University

ABSTRACT. 有限群 G 上，Mackey 関手はアーベル群の圏 Ab に値をとる，共変性と反変性をあわせもつ両変的な関手として定義される．G 上の Mackey 関手の圏 Mack(G) は Burnside 関手 Ω をユニットとする対称モノイダルアーベル圏となり，G が自明な場合は Ab に圏同値になることから，Mackey 関手は「アーベル群の G-両変類似物」とみなされる．モノイドの類似物としては半 Mackey 関手の概念があり，さらに可換 (半) 環の G-両変類似物として (半) 丹原関手が定義できる．

本稿ではモノイド，アーベル群や可換 (半) 環に対する代数的操作の G-両変版を与え，Mackey 関手論における既存のいくつかの構成との関係，新たな丹原関手の例の構成，ならびに Burnside 関手に対する巨視的な性質の記述を行う．

記号と記法

モノイドは常に可換で，単位元を持つものとする．同様に (半) 環は可換で，零元 0 と単位元 1 をもつもののみ考える．モノイドの射は単位元を保つとし，(半) 環の射は 0 と 1 を保つとする．モノイドの圏を Mon，アーベル群の圏を Ab，半環の圏を SRing，環の圏を Ring であらわす．

有限群 G をひとつ固定し，単位元は e であらわす．e のみからなる G の自明な部分群 $\{e\}$ も，e と略記する．$H \leq G$ は H が G の部分群であることを意味する．${}_G\mathrm{set}$ で，有限 G-集合と G-写像のなす圏をあらわす．本稿では，(半)Mackey 関手・(半) 丹原関手というときには G 上のものを指す．

一般に圏 $\mathscr{C}$ の対象 X,Y に対し，X から Y への $\mathscr{C}$ における射全体のなす集合を $\mathscr{C}(X,Y)$ とあらわす．

1. (半)MACKEY 関手と丹原関手

まず，(半)Mackey 関手と丹原関手の定義を紹介する．Mackey 関手については多数の文献があるが，[3] には簡潔かつ詳細に纏められている．丹原関手は TNR 関手という名称で [14] において定義された．

定義 1.1. 反変関手 $F\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$ が**加法的**であるとは，任意の $X,Y \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し，包含写像 $\iota_X\colon X \hookrightarrow X \amalg Y$, $\iota_Y\colon Y \hookrightarrow X \amalg Y$ の誘導する射

$$(F(\iota_X),F(\iota_Y))\colon F(X \amalg Y) \to F(X) \times F(Y)$$

が同型 (全単射) となるときをいう．

The author wishes to thank Professor Hiroki Sasaki and Professor Fumihito Oda.
Supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 22740005.

定義 1.2. G 上の **半 Mackey 関手** M とは，共変関手 $M_*\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$ と加法的反変関手 $M^*\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$ の対 $M = (M^*, M_*)$ であって，任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し $M^*(X) = M_*(X)\,(= M(X)$ とおく$)$ を満たし，かつ次の **Mackey 条件**を満たすもののことをいう．

- (Mackey 条件)
  ${}_G\mathrm{set}$ における引き戻し図式

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

  から得られる次の図式は可換．

$$\begin{tikzcd} M(X') \arrow[d, "M_*(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M(Y') \arrow[l, "M^*(f')"'] \arrow[d, "M_*(y)"] \\ M(X) & M(Y) \arrow[l, "M^*(f)"] \end{tikzcd}$$

射 f に対し $M^*(f)$ は **restriction**，$M_*(f)$ は **transfer** とよばれ，それぞれ f^*, f_* と略記する．M が半 Mackey 関手のとき，M^* および M_* は Mon への関手となる．M^* を半 Mackey 関手 M の**反変部分**，M_* を**共変部分**という．

半 Mackey 関手 M, N の間の射は，モノイドの射の族

$$\varphi = \{\varphi_X\colon M(X) \to N(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})}$$

であって，共変部分・反変部分それぞれに関し自然変換となるものと定める．半 Mackey 関手の圏を $\mathrm{SMack}(G)$ であらわす．

全ての $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して $M(X)$ がアーベル群のとき，半 Mackey 関手 M は **Mackey 関手**とよばれる．これは，M^*, M_* が Ab への関手となることに同値である．Mackey 関手のなす充満部分圏を $\mathrm{Mack}(G) \subseteq \mathrm{SMack}(G)$ であらわす．

以下は (半)Mackey 関手の例を与える．

例 1.3.

(1) **半 Burnside 関手** $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SMack}(G))$．任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して

$$\mathfrak{A}(X) = c\ell({}_G\mathrm{set}/X)$$

として定義される．ただし，${}_G\mathrm{set}/X$ は X 上の G-集合のなす圏をあらわし，$c\ell$ で同型類全体をあらわす．モノイドの演算は直和による加法．

(2) **Burnside 関手** $\Omega \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mack}(G))$ ([3], [13])．任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して

$$\Omega(X) = K_0({}_G\mathrm{set}/X) = K_0(\mathfrak{A}(X)).$$

ここで K_0 は Grothendieck 群をあらわす．

(3) Q を G-モノイドとする．任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して

$$\mathcal{P}_Q(X) = \{X \text{ から } Q \text{ への } G\text{-写像}\}$$

とすると，$\mathcal{P}_Q$ は半 Mackey 関手をなす．これを Q に付随する**固定点関手**という．この構成で，G-モノイドの圏 G-Mon から $\mathrm{SMack}(G)$ への忠実充満関手

$$\mathcal{P}\colon G\text{-Mon} \to \mathrm{SMack}(G)\ ;\ Q \mapsto \mathcal{P}_Q.$$

が得られ，G-Mon は $\mathcal{P}$ を通して SMack(G) の充満部分圏とみなせる．Q が G-加群のときは $\mathcal{P}_Q \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mack}(G))$ となる．

注 1.4. Mack(G) はアーベル圏をなす．また，任意の $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mack}(G))$ に対してテンソル積 $M \otimes_\Omega N (= M \hat{\otimes} N)$ が定義され [3]，Mack(G) は Ω をユニットとする対称モノイダル圏となる．また，$G = e$ (自明な群) のとき，自然な圏同値 $\mathrm{SMack}(e) \simeq \mathrm{Mon}$ および $\mathrm{Mack}(e) \simeq \mathrm{Ab}$ が存在する．

これらのことから，G 上の半 Mackey 関手をモノイドの G-両変類似物，Mackey 関手をアーベル群の G-両変類似物とみなす．Ω は $\mathbb{Z}$ の G-両変版に相当する．

この視点のもと ([16])，可換環の G-両変類似物とみなされるものが**丹原関手**である．

定義 1.5. 任意の $f \in {}_G\mathrm{set}(X, Y)$ および $p \in {}_G\mathrm{set}(A, X)$ に対し，f と p から得られる**標準的指数図式** とは，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "exp"] & A \arrow[l, "p"'] & X \underset{Y}{\times} \Pi_f(A) \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & & \Pi_f(A) \arrow[ll, "\pi"] \end{tikzcd}$$

なる可換図式のことをいう．ここで

$$\Pi_f(A) = \left\{ (y, \sigma) \;\middle|\; \begin{array}{l} y \in Y, \\ \sigma\colon f^{-1}(y) \to A \text{ は写像}, \\ p \circ \sigma \text{ は } f^{-1}(y) \text{ 上で恒等的} \end{array} \right\},$$

$$\pi(y, \sigma) = y, \qquad e(x, (y, \sigma)) = \sigma(x),$$

であり，f' は π による f の引き戻しである．

${}_G\mathrm{set}$ の可換図式で標準的指数図式に同型なものは **指数図式**とよばれる．指数図式の性質は，[14] に詳しく記されている．

丹原関手の定義は [14] でなされた．([14] では TNR 関手と名付けられている．)

定義 1.6. G 上の**半丹原関手** T とは，二つの共変関手

$$T_+ \colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}, \quad T_\bullet \colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$$

および加法的反変関手

$$T^* \colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$$

のなす三つ組 $T = (T^*, T_+, T_\bullet)$ であって，次を満たすものをいう．

(i) $T^\alpha = (T^*, T_+)$ と $T^\mu = (T^*, T_\bullet)$ はそれぞれ G 上の半 Mackey 関手をなす．T^α を T の**加法部分**とよび，T^μ を T の**乗法部分**とよぶ．

(ii) (分配則) ${}_G\mathrm{set}$ における任意の指数図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "exp"] & A \arrow[l, "p"'] & Z \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, "\rho"] \\ Y & & B \arrow[ll, "q"] \end{tikzcd}$$

に対して，次の図式は可換となる．

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[d, "T_\bullet(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T(A) \arrow[l, "T_+(p)"'] \arrow[r, "T^*(\lambda)"] & T(Z) \arrow[d, "T_\bullet(\rho)"] \\ T(Y) & & T(B) \arrow[ll, "T_+(q)"] \end{tikzcd}$$

$T=(T^*,T_+,T_\bullet)$ が G 上の丹原関手のとき，任意の $X\in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して $T(X)$ は半環となる．また，任意の $f\in {}_G\mathrm{set}(X,Y)$ に対し

- $T^*(f)\colon T(Y)\to T(X)$ は半環の射となる．これは **restriction** とよばれる．
- $T_+(f)\colon T(X)\to T(Y)$ は加法的準同型となり，**加法的 transfer** とよばれる．
- $T_\bullet(f)\colon T(X)\to T(Y)$ は乗法的準同型となり，**乗法的 transfer** とよばれる．

$T^*(f),T_+(f),T_\bullet(f)$ は $f^*,f_+,f_\bullet$ と略記される．

半丹原関手 T,S の間の射とは，半環の射の族

$$\varphi=\{\varphi_X\colon T(X)\to S(X)\}_{X\in\mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})}$$

であって，反変部分とふたつの共変部分それぞれに関し自然同型となるものをいう．半丹原関手の圏を $\mathrm{STam}(G)$ であらわす．

$T(X)$ が任意の $X\in\mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して環となるとき，半丹原関手 T は **丹原関手** とよばれる．丹原関手のなす充満部分圏を $\mathrm{Tam}(G)\subseteq\mathrm{STam}(G)$ であらわす．

[14] において，包含関手 $\mathrm{Tam}(G)\hookrightarrow\mathrm{STam}(G)$ の左随伴関手が構成されている．これを $\gamma\colon\mathrm{STam}(G)\to\mathrm{Tam}(G)$ とかくことにする．これは半環の Grothendieck 環をとる関手 $\mathrm{SRing}\to\mathrm{Ring}$ の G-両変版とみなせる．実際，半丹原関手 T に対して γT は

$$(\gamma T)(X)=K_0(T(X))\quad({}^\forall X\in\mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set}))$$

を満たす丹原関手として構成される．γT の乗法的 transfer の構成が，最も非自明な箇所である．

注 1.7. 半丹原関手 T が丹原関手となることは，T^α が Mackey 関手となることに同値である．加法部分，乗法部分をとることで次の関手が得られる．

$$(-)^\alpha\colon\mathrm{STam}(G)\to\mathrm{SMack}(G),\qquad(-)^\alpha\colon\mathrm{Tam}(G)\to\mathrm{Mack}(G),$$
$$(-)^\mu\colon\mathrm{STam}(G)\to\mathrm{SMack}(G),\qquad(-)^\mu\colon\mathrm{Tam}(G)\to\mathrm{SMack}(G).$$

[12] や [15] にみられるように，実際にはより強く，$(-)^\alpha\colon\mathrm{Tam}(G)\to\mathrm{Mack}(G)$ は Green 関手の圏への関手となることが示される：

$$(-)^\alpha\colon\mathrm{Tam}(G)\to\mathrm{Green}(G)$$

G が自明な場合には自然な圏同値 $\mathrm{STam}(e)\simeq\mathrm{SRing}$ および $\mathrm{Tam}(e)\simeq\mathrm{Ring}$ が成立し，半丹原関手は半環の，丹原関手は環の G-両変類似物とみなすことができる．

G が自明な場合には，上記の関手は忘却関手

$$(-)^\alpha\colon\mathrm{SRing}\to\mathrm{Mon},\qquad(-)^\alpha\colon\mathrm{Ring}\to\mathrm{Ab},$$
$$(-)^\mu\colon\mathrm{SRing}\to\mathrm{Mon},\qquad(-)^\mu\colon\mathrm{Ring}\to\mathrm{Mon}$$

に他ならない．ここで (半) 環 R に対し，R^α は R の乗法を忘れた加法的モノイドをあらわし，R^μ は R の加法を忘れた乗法的モノイドをあらわす．

例 1.8. ([14])

(1) 半 Burnside 関手 $\mathfrak{A}$ は半丹原関手となる．積はファイバー積で定義される．
(2) Burnside 関手 Ω は丹原関手であり，$\mathrm{Tam}(G)$ における始対象である．
(3) R を G-代数とするとき，固定点関手 $\mathcal{P}_R$ は丹原関手となる．

注 1.9. ([15, §12] または [8]) T と S が丹原関手のとき，$T\underset{\Omega}{\otimes}S$ も丹原関手となる．加えて，射 $\iota_T\in\mathrm{Tam}(G)(T,T\underset{\Omega}{\otimes}S)$ および $\iota_S\in\mathrm{Tam}(G)(S,T\underset{\Omega}{\otimes}S)$ が存在し，$T\underset{\Omega}{\otimes}S$ は $\mathrm{Tam}(G)$ における T と S の余積となる．Ω はこのテンソル積に関するユニットである．

これまでにも見たように，Mackey 関手・丹原関手として Ω は「$\mathbb{Z}$ の G-両変版」とみなされ，圏 Mack(G), Tam(G) において特別な位置を占める．丹原関手の立場にたつことで，Burnside 環の巨視的な性質の記述が期待される．

2. 半 Mackey 関手の丹原化

定義 2.1. M を半 Mackey 関手とする．任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し，圏 $M\text{-}{}_G\mathrm{set}/X$ を次のように定義する．

(1) $M\text{-}{}_G\mathrm{set}/X$ の対象は，$(A \overset{p}{\to} X) \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set}/X)$ と $m_A \in M(A)$ の対 $(A \overset{p}{\to} X, m_A)$ とする．

(2) 対象 $(A_1 \overset{p_1}{\to} X, m_{A_1})$ から $(A_2 \overset{p_2}{\to} X, m_{A_2})$ への射は，$f \in {}_G\mathrm{set}(A_1, A_2)$ であって $p_2 \circ f = p_1$ かつ $M^*(f)(m_{A_2}) = m_{A_1}$ を満たすものとする．

$M\text{-}{}_G\mathrm{set}/X$ の任意の二つの対象 $(A_1 \overset{p_1}{\to} X, m_{A_1})$ および $(A_2 \overset{p_2}{\to} X, m_{A_2})$ に対して，和と積が

(i) $(A_1 \overset{p_1}{\to} X, m_{A_1}) \amalg (A_2 \overset{p_2}{\to} X, m_{A_2}) = (A_1 \amalg A_2 \overset{p_1 \cup p_2}{\longrightarrow} X, m_{A_1} \amalg m_{A_2})$

(ii) $(A_1 \overset{p_1}{\to} X, m_{A_1}) \times (A_2 \overset{p_2}{\to} X, m_{A_2}) = (A_1 \underset{X}{\times} A_2 \overset{p}{\to} X, m_{A_1} \star m_{A_2})$

により定義される．ただし，$m_{A_1} \amalg m_{A_2} \in M(A_1 \amalg A_2)$ は同型

$$(M^*(\iota_1), M^*(\iota_2)) \colon M(A_1 \amalg A_2) \overset{\cong}{\to} M(A_1) \times M(A_2)$$

を通して $(m_{A_1}, m_{A_2}) \in M(A_1) \times M(A_2)$ に対応する元 ($\iota_1 \colon A_1 \hookrightarrow A_1 \amalg A_2$ および $\iota_2 \colon A_2 \hookrightarrow A_1 \amalg A_2$ は包含写像) とし，$m_{A_1} \star m_{A_2}$ は $M(A_1 \underset{X}{\times} A_2)$ における $M^*(\varpi_1)(m_{A_1})$ と $M^*(\varpi_2)(m_{A_2})$ の積 (ϖ_1 および ϖ_2 は下の引き戻し図式での射影で，p は $p = p_1 \circ \varpi_1 = p_2 \circ \varpi_2$ により定義) とする．

$$\begin{tikzcd} A_1 \underset{X}{\times} A_2 \arrow[r, "\varpi_2"] \arrow[d, "\varpi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A_2 \arrow[d, "p_2"] \\ A_1 \arrow[r, "p_1"'] & X \end{tikzcd}$$

この和および積により，$\mathcal{S}_M(X) = c\ell(M\text{-}{}_G\mathrm{set}/X)$ は半環となる．さらに $\mathcal{S}_M = \{\mathcal{S}_M(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})}$ は半丹原関手をなし，関手

$$\mathcal{S} \colon \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{STam}(G)\ ;\ M \mapsto \mathcal{S}_M$$

を与える ([12, Proposition 2.11, Theorem 2.12])．

命題 2.2. ([12, Theorem 2.15]) 関手 $\mathcal{S} \colon \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{STam}(G)$ は，乗法部分をとる関手 $(-)^{\mu} \colon \mathrm{STam}(G) \to \mathrm{SMack}(G)$ の左随伴を与える．

これを $\gamma \colon \mathrm{STam}(G) \to \mathrm{Tam}(G)$ と合成すれば，系として次が得られる．

系 2.3. 合成

$$\Omega[-] = \gamma \circ \mathcal{S} \colon \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{Tam}(G)$$

は，$(-)^{\mu} \colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{SMack}(G)$ の左随伴を与える．これを**丹原化**関手とよぶことにする．G が自明な場合は，半群環をとる関手 $\mathbb{Z}[-] \colon \mathrm{Mon} \to \mathrm{Ring}$ に他ならない．

丹原化関手は，**(i) 斜 Burnside 丹原関手** [13] **(ii) Witt-Burnside 環** [4] **(iii) F-Burnside 関手** [6] と関係づけられる．さらに，[7] で示された結果から，(iii) と Boltje の $(-)_+$- 構成との関係も得られる．

(i) [13] において丹原関手に対する Dress 構成がなされ，特に斜 Burnside 環に丹原関手の構造が与えられた．すなわち，$\Omega \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Tam}(G))$ を有限 G-モノイド Q でひねることにより，新たな丹原関手 $\Omega_Q \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Tam}(G))$ が

$$\Omega_Q(X) = \Omega(X \times Q)$$

を満たすように構成される．

命題 2.4. ([12, Proposition 3.2]) 任意の有限 G-モノイド Q に対し，丹原関手の自然な同型

$$\varphi \colon \Omega[\mathcal{P}_Q] \xrightarrow{\cong} \Omega_Q$$

が存在する．

すなわち，斜 Burnside 丹原関手は固定点関手の丹原化に一致する．また，左辺は Q を有限と仮定せずとも，一般の G-モノイドに対して定義される．

(ii) [4] において Witt-Burnside 環への丹原関手の有用性が明らかにされた．

定義 2.5. 丹原関手 T に対し，$T(G/e)$ は G-代数となる．各 T にこれの G-不変部分環を対応させることで，e における **G-不変代入関手**

$$\mathrm{ev}_e \colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{Ring} \ ; \ T \mapsto T(G/e)^G$$

が得られる．

Fact 2.6. ([4, Theorem 15] の系) 任意の有限群 G に対し，$\mathrm{ev}_e \colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{Ring}$ は左随伴関手

$$\mathbb{W} \colon \mathrm{Ring} \to \mathrm{Tam}(G) \ ; \ R \mapsto \mathbb{W}_R$$

をもち，自然な環の同型

$$\mathbb{W}_G(R) \cong \mathbb{W}_R(G/G)$$

が成り立つ．ここで左辺は，係数環を R とする，群 G 上の Witt-Burnside 環 ([5]) をあらわす．$\mathbb{W}_R$ を，R を係数とする **Witt-Burnside(丹原) 関手**とよぶことにする．

この事実を用いると，係数環が半群環の場合に Witt-Burnside 関手を丹原化で記述できる．

定義 2.7. モノイド Q に対し，Mackey 関手 $\mathcal{L}_Q$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Q(G/H) &= Q & (^\forall H \le G) \\ r^H_K &= [H:K] \colon Q \to Q & (^\forall K \le {}^\forall H \le G) \\ t^H_K &= \mathrm{id}_Q \colon Q \to Q & (^\forall K \le {}^\forall H \le G) \\ c_{g,H} &= \mathrm{id}_Q \colon Q \to Q & (^\forall g \in G, {}^\forall H \le G) \end{aligned}$$

により定義する．ここで，$[H:K]$ は指数 $[H:K]$ 倍をあらわす．$\mathcal{L}_Q$ は，固定点関手 $\mathcal{P}_Q$ の restriction と transfer を入れ替えたものとなっている．

丹原関手の場合と同様に半 Mackey 関手に対しても，**G-不変代入関手**

$$\mathrm{ev}_e \colon \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{Mon} \ ; \ M \mapsto M(G/e)^G$$

が得られるが，$\mathcal{L}_Q$ によりこの左随伴が得られることが示される．

主張 2.8. ([12, Claim 3.8]) 対応 $Q \mapsto \mathcal{L}_Q$ は関手

$$\mathcal{L} \colon \mathrm{Mon} \to \mathrm{SMack}(G)$$

をなし，ev_e の左随伴となる．

ここで，明らかに次の図式は可換であり，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tam}(G) \arrow[r, "\mathrm{ev}_e"] \arrow[d, "(-)^{\mu}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ring} \arrow[d, "(-)^{\mu}"] \\ \mathrm{SMack}(G) \arrow[r, "\mathrm{ev}_e"'] & \mathrm{Mon} \end{tikzcd}$$

左随伴関手の一意性から，関手の同型

$$\mathbb{W} \circ \mathbb{Z}[-] \cong \Omega[-] \circ \mathcal{L} \tag{2.1}$$

が従う ([12, Theorem 3.9]).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tam}(G) \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ring} \arrow[l, "\mathbb{W}"'] \\ \mathrm{SMack}(G) \arrow[u, "\Omega[-]"] & \mathrm{Mon} \arrow[l, "\mathcal{L}"] \arrow[u, "\mathbb{Z}[-]"'] \end{tikzcd}$$

(iii) F-Burnside 関手 $\mathcal{A}_F$ は [6] において定義された Green 関手である．モノイドに値をとる加法反変関手 $F\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Mon}$ に対し，Green 関手 $\mathcal{A}_F$ が構成される．

Fact 2.9 (Theorem 5.2 in [6])**.** 関手

$$\mathcal{A}\colon \mathrm{Madd}(G) \to \mathrm{Green}(G)\ ;\ F \mapsto \mathcal{A}_F$$

は，Green 関手の反変部分をとる関手

$$\mathrm{Green}(G) \to \mathrm{Madd}(G) \quad ; \quad (M^*, M_*) \mapsto M^*$$

の左随伴を与える．ここで $\mathrm{Madd}(G)$ は，モノイドに値をとる加法反変関手のなす圏をあらわす．

関手 $\mathcal{A}$ と丹原化は次の可換図式で関係づけられる ([12]).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SMack}(G) \arrow[r, "(M^*,M_*)\mapsto M^*"] \arrow[d, "\Omega[-]"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Madd}(G) \arrow[d, "\mathcal{A}"] \\ \mathrm{Tam}(G) \arrow[r, "(-)^{\alpha}"'] & \mathrm{Green}(G) \end{tikzcd}$$

注 2.10. [7] において，F-Burnside 関手は Boltje の $(-)_+$- 構成を用いて以下のように記述された．

$$(\mathcal{R} \circ \mathbb{Z}[-])_+ \cong \mathcal{A}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Madd}(G) \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\mathbb{Z}[-]"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Green}(G) \\ \mathrm{Radd}(G) \arrow[r, "\mathcal{R}"'] & \mathrm{Res}_{\mathrm{alg}}(G) \arrow[u, "(-)_+"'] \end{tikzcd}$$

ここで $\mathrm{Radd}(G)$ は環の圏に値をとる加法的反変関手の圏，$\mathrm{Res}_{\mathrm{alg}}(G)$ は G 上の algebra restriction functor ([2]) のなす圏をあらわし，$\mathcal{R}\colon \mathrm{Radd}(G) \to \mathrm{Res}_{\mathrm{alg}}(G)$ は自然な圏同値をあらわす ([7, Proposition 3.4])．また，$\mathbb{Z}[-]\colon \mathrm{Madd}(G) \to \mathrm{Radd}(G)$ は半群環関手 $\mathbb{Z}[-]\colon \mathrm{Mon} \to \mathrm{Ring}$ を合成する関手

$$\mathbb{Z}[-] \circ -\colon \mathrm{Madd}(G) \to \mathrm{Radd}(G)$$

の略記．

系 2.11. ([12, Corollary 3.24]) 任意の半 Mackey 関手 $M = (M^*, M_*)$ に対し，Green 関手の同型

$$\Omega[M]^{\alpha} \cong (\mathcal{R}_{\mathbb{Z}[M^*]})_+$$

が得られる．

注 2.12. Witt-Burnside 関手との同型 (2.1) は係数が半群環に限られているため，一般の係数環でも Witt-Burnside 環を記述する何らかの新たな構成が期待される．注 2.10 をふまえると，丹原化の拡張を試みるよりも，Boltje の $(-)_+$ - 構成を用いる方がより現実的であるようにも思われる．

3. 丹原関手のイデアル

可換環のイデアルの G-両変版として，丹原関手のイデアルも定義できる．

定義 3.1. ([10, Definition 2.1]) T を丹原関手とする．T の**イデアル** $\mathscr{I}$ とは，イデアルの族 $\mathscr{I}(X) \subseteq T(X)$ ($^{\forall}X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$) であって

(i) $f^*(\mathscr{I}(Y)) \subseteq \mathscr{I}(X)$,
(ii) $f_+(\mathscr{I}(X)) \subseteq \mathscr{I}(Y)$,
(iii) $f_\bullet(\mathscr{I}(X)) \subseteq f_\bullet(0) + \mathscr{I}(Y)$

を任意の $f \in {}_G\mathrm{set}(X, Y)$ に対して満たすときをいう．

例 3.2. T を丹原関手とする．

(1) T 全体は T のイデアルである．通常は考察しない．
(2) 全ての $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に零イデアル $(0) \subseteq T(X)$ を対応させることで，T の**零イデアル** (0) が得られる．
(3) ([10, Proposition 2.14]) $I \subseteq T(G/e)$ を $T(G/e)$ の G-不変なイデアルとするとき，$\mathscr{I}_I$ を

$$\mathscr{I}_I(X) = \bigcap_{\gamma \in {}_G\mathrm{set}(G/e, X)} (\gamma^*)^{-1}(I).$$

で定めると，これは T のイデアルとなる．さらに，$\mathscr{I}(G/e) = I$ を満たすイデアルの中で最大のものであることがわかる．

この例から，丹原関手のイデアルは $T(G/e)$ の G-不変イデアルより広い対象であるといえる．さらに，T を固定点関手にとれること (例 1.8) と合わせると，丹原関手のイデアルは G-代数の G-不変イデアルの拡張ということもできる．

命題 3.3. $\mathscr{I}$ が丹原関手 T のイデアルであるとき，

$$T/\mathscr{I} = \{T(X)/\mathscr{I}(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})}$$

も丹原関手となる．さらに，射影 $p_X : T(X) \to T(X)/\mathscr{I}(X)$ は丹原関手の射 $p : T \to T/\mathscr{I}$ を与える．

準同型定理の G-両変版は丹原関手に対しても成立する．

注 3.4. $\varphi : T \to S$ を丹原関手の射とするとき，

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathrm{Ker}(\varphi_X)\}_{X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})}$$

は T のイデアルをなし，p および φ と可換な自然な同型

$$T/Ker\,\varphi \xrightarrow{\cong} Im\,\varphi,$$

が存在する．

従って丹原関手 T のイデアルは，T から別の丹原関手 S への ($Imf = S$ を満たす) 射と本質的に 1 対 1 に対応しており，イデアルの定義の正当性が見受けられる．

可換環の場合と同様に，イデアルの共通部分，和，積などが定義される．和および共通部分は各 $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ ごとに和・共通部分をとることで定義される ([10, Proposition 3.2, Proposition 3.13])．積は次のように定義される．

命題 3.5. ([10, Proposition 3.7]) 丹原関手 T のイデアル $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ に対し，

$$\mathscr{I}\mathscr{J}(X) = \{p_+(ab) \in T(X) \mid p \in {}_G\mathrm{set}(A, X), a \in \mathscr{I}(A), b \in \mathscr{J}(A)\}$$

($^\forall X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$) と定義すると $\mathscr{I}\mathscr{J}$ は T のイデアルとなる．

これにより丹原関手の素イデアルの概念が定義され，その全体は Zariski 位相により位相空間となる．

定義 3.6. ([10, Definition 4.1, Proposition 4.4, Corollary 4.5]) 丹原関手 T のイデアル $\mathfrak{p}$ が**素**であるとは，以下の同値な条件を満たすときをいう．

(1) T の任意のイデアル $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ に対し，

$$\mathscr{I}\mathscr{J} \subseteq \mathfrak{p} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{I} \subseteq \mathfrak{p} \ \ or \ \ \mathscr{J} \subseteq \mathfrak{p}$$

が成立．

(2) 任意の推移的な $X, Y \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ および $a \in T(X)$, $b \in T(Y)$ に対し，

$$\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq \mathfrak{p} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathfrak{p}(X) \ \ or \ \ b \in \mathfrak{p}(Y)$$

が成立．ただし，$\langle a\rangle$ は a の生成する ($= a$ を含む最小の) T のイデアル．

また，T の素イデアル全体を $\mathit{Spec}\, T$ とあらわす．

Burnside 丹原関手 Ω のイデアルを考えることで，各 $\Omega(X)$ ではみられない大域的な性質が記述できる．

命題 3.7. ([10, Theorem 4.40]) 任意の有限群 G に対し，Ω の零イデアル (0) は素イデアルである．

これは，$\mathbb{Z}$ が整域であることの G-両変類似であるといえる．系として，$\mathit{Spec}\,\Omega$ は $\mathit{Spec}\,\mathbb{Z}$ を真に含む位相空間であることも従う ([10, Corollary 4.42])．

もし，丹原関手 T が「体」であるということの定義を零イデアル (0) が極大イデアルとなることとするならば，次の同値が示される．

定義 3.8. ([10, Definition 4.28, Theorem 4.32]) 丹原関手 T が**体状**であるとは，(0) が T の極大イデアルとなるときをいう．T が体状であることは，次の 2 条件を満たすことと同値である．

(i) 任意の推移的な $X, Y \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ の間の射 $f \in {}_G\mathrm{set}(X, Y)$ に対し，f^* は単射．

(ii) $T(G/e)$ は非自明な G-不変イデアルをもたない．

条件 (i) を，**MR (monomorphic restriction) 条件** とよぶことにする．MR 条件は，丹原関手 T が固定点関手 $\mathcal{P}_{T(G/e)}$ の部分関手となることに同値である ([10, Proposition 4.21])．

任意の丹原関手 T に対して，普遍性を満たす "MR 化" が存在する．

命題 3.9. ([10, Theorem 4.24]) $\mathrm{Tam}^{\mathrm{MRC}}_{(G)} \subseteq \mathrm{Tam}(G)$ で，MR 条件を満たす丹原関手のなす充満部分圏をあらわす．丹原関手 T に対して $T_{\mathrm{MRC}} = T/\mathscr{I}_{(0)}$ と定義するとき，次のことが成立する．

(1) 任意の $T \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Tam}(G))$ に対し，$T_{\mathrm{MRC}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Tam}^{\mathrm{MRC}}_{(G)})$.

(2) 対応 $T \mapsto T_{\mathrm{MRC}}$ は関手

$$(\ )_{\mathrm{MRC}} \colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{Tam}^{\mathrm{MRC}}_{(G)}$$

を引起.

(3) (2) の関手は，包含関手 $\mathrm{Tam}^{\mathrm{MRC}}_{(G)} \hookrightarrow \mathrm{Tam}(G)$ の左随伴を与える.

また，Burnside 丹原関手の $\mathring{\mathrm{M}}\mathrm{R}$ 化は，$\mathbb{Z}$ に付随する固定点関手となることが示される.

命題 3.10. ([10, Example 4.25]) $\Omega_{\mathrm{MRC}} \cong \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$.

4. 丹原関手の FRACTION

可換環が積閉集合により局所化されたのと同様に，丹原関手の fraction を構成できる．まず，半 Mackey 関手の fraction について述べる.

定義 4.1. M が半 Mackey 関手であるとき，$\mathrm{SMack}(G)$ における M の部分対象を**半 Mackey 部分関手**とよぶ.

M の半 Mackey 部分関手 $\mathscr{S} \subseteq M$ を与えることは，部分モノイドの族 $\{\mathscr{S}(X) \subseteq M(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}(_G\mathrm{set})}$ であって，任意の $f \in {}_G\mathrm{set}(X, Y)$ に対し

$$f^*(\mathscr{S}(Y)) \subseteq \mathscr{S}(X), \quad f_*(\mathscr{S}(X)) \subseteq \mathscr{S}(Y)$$

を満たすものを与えることに同値.

例 4.2. 半 Mackey 関手 M に対して，

$$M^{\times}(X) = (M(X))^{\times} = \{M(X) \text{ の可逆元 }\}$$

は半 Mackey 部分関手 $M^{\times} \subseteq M$ をなす.

モノイドが積閉集合で局所化されたのと同様に，半 Mackey 関手の部分関手による fraction が得られ，モノイドの場合と同様の普遍性を満たすことがわかる.

命題 4.3. ([9, Proposition 2.3]) 半 Mackey 部分関手 $\mathscr{S} \subseteq M$ に対し次が成立する.

(1) $\mathscr{S}^{-1}M = \{\mathscr{S}(X)^{-1}M(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}(_G\mathrm{set})}$ は M から誘導される半 Mackey 関手の構造をもつ.

(2) モノイドの射の族

$$\ell_{\mathscr{S},X} \colon M(X) \to \mathscr{S}^{-1}M(X)\ ;\ x \mapsto \frac{x}{1} \quad ({}^{\forall}X \in \mathrm{Ob}(_G\mathrm{set}))$$

は半 Mackey 関手の射 $\ell_{\mathscr{S}} \colon M \to \mathscr{S}^{-1}M$ を与える.

(3) 任意の半 Mackey 関手 M' に対し，$\ell_{\mathscr{S}}$ は全単射

$$\mathrm{SMack}(G)(\mathscr{S}^{-1}M, M') \xrightarrow{\cong} \{\vartheta \in \mathrm{SMack}(G)(M, M') \mid \vartheta(\mathscr{S}) \subseteq M'^{\times}\}$$

を引き起こす.

以下で，モノイド Q の積閉集合 $S \subseteq Q$ に対し，S の**飽和** (saturation) を

$$\widetilde{S} = \{x \in Q \mid {}^{\exists}a \in Q \text{ such that } ax \in S\}$$

とかくことにする．$S = \widetilde{S}$ のとき，S は飽和な積閉集合であるという．モノイドの局所化に関し自然な同型 $S^{-1}Q \cong \widetilde{S}^{-1}Q$ が存在するので，以降は飽和な積閉集合のみを考える．特に，$1 \in S$ としてよい．また，Q が G-モノイドで $S \subseteq Q$ が G-不変のとき，その飽和 $\widetilde{S} \subseteq Q$ も G-不変となる．半 Mackey 部分関手 $\mathscr{S} \subseteq M$ が飽和である

とは，任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し $\mathscr{S}(X) \subseteq M(X)$ が飽和な積閉集合であるときをいう．

丹原関手 T のイデアルを $T(G/e)$ の G-不変イデアルから構成できたのと同じように，半 Mackey 関手 M の半 Mackey 部分関手を $M(G/e)$ の G-不変積閉集合から構成することができる．

命題 4.4. ([9, Proposition 3.4, 3.5]) G-不変な飽和積閉集合 $S \subseteq M(G/e)$ に対し，以下により半 Mackey 部分関手 $\mathscr{L}_S, \mathscr{U}_S \subseteq M$ が定まる．

(1) 推移的な任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し，

$$\mathscr{L}_S(X) = \gamma_{X*}(S).$$

ここで $\gamma_X \in {}_G\mathrm{set}(G/e, X)$ は G/e から X へのひとつの射であり，$\mathscr{L}_S(X)$ はそのとり方によらない．

(2) $S_0 = (\mathrm{pt}^*_{G/e})^{-1}(S) \subseteq M(G/G)$ とおき，推移的な任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して

$$\mathscr{U}_S(X) = (\,(\mathrm{pt}_X)^*(S_0)\,)^{\sim}$$

と定める．ここで $\mathrm{pt}_X \colon X \to G/G$ は (唯一の) 定値写像をあらわす．

このとき $S = \mathscr{L}_S(G/e) = \mathscr{U}_S(G/e)$ が成立し，$\mathscr{S}(G/e) = S$ を満たす半 Mackey 部分関手の中で $\mathscr{L}_S$ は最小，$\mathscr{U}_S$ は最大のものとなる ([9, Proposition 3.7])．

T が丹原関手のときは，T^μ の半 Mackey 部分関手による T の fraction を得ることができる．これは，可換環の積閉集合による分数環の，G-両変類似とみなせる．

命題 4.5. ([9, Proposition 4.4, Corollary 4,7]) T を丹原関手とし，$\mathscr{S} \subseteq T^\mu$ を半 Mackey 部分関手とする．このとき，次が成立する．

(1) $\mathscr{S}^{-1}T = \{\mathscr{S}(X)^{-1}T(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})}$ は T から誘導される丹原関手の構造をもつ．

(2) 可換環の射の族

$$\ell_{\mathscr{S},X} \colon T(X) \to \mathscr{S}^{-1}T(X)\ ;\ x \mapsto \frac{x}{1} \quad ({}^\forall X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set}))$$

は丹原関手の射 $\ell_{\mathscr{S}} \colon T \to \mathscr{S}^{-1}T$ を与える．

(3) 任意の丹原関手 T' に対し，$\ell_{\mathscr{S}}$ は全単射

$$\mathrm{Tam}(G)(\mathscr{S}^{-1}T, T') \xrightarrow{\cong} \{\varphi \in \mathrm{Tam}(G)(T, T') \mid \varphi(\mathscr{S}) \subseteq T'^{\times}\}$$

を引き起こす．

丹原化と fraction は次のように関係づけられる．ここで，随伴射 $M \hookrightarrow \Omega[M]^\mu$ により，M の半 Mackey 部分関手 $\mathscr{S}$ は自然と $\Omega[M]^\mu$ の半 Mackey 部分関手とみなせることに注意．

命題 4.6. ([9, Proposition 5.2]) M を半 Mackey 関手，$\mathscr{S} \subseteq M$ を半 Mackey 部分関手とするとき，自然な同型

$$\mathscr{S}^{-1}(\Omega[M]) \cong \Omega[\mathscr{S}^{-1}M]$$

が存在する．

イデアルによる剰余と fraction は以下のように関係づけられる．

命題 4.7. ([9, Remark 6.3, Proposition 6.4]) T を丹原関手とし，$\mathscr{I}$ を T のイデアル，$\mathscr{S} \subseteq T^\mu$ を飽和な半 Mackey 部分関手とする．このとき，次が成立する．

(1) $\mathscr{I}(G/e) \cap \mathscr{S}(G/e) = \emptyset$ であることは，空でない任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し $\mathscr{I}(X) \cap \mathscr{S}(X) = \emptyset$ を満たすことに同値．（このとき，$\mathscr{I} \cap \mathscr{S} = \emptyset$ とあらわす．）

(2) $\mathscr{S} \cap \mathscr{I} = \emptyset$ のとき，$\mathscr{S}^{-1}\mathscr{I}$ を

$$\mathscr{S}^{-1}\mathscr{I}(X) = \{\alpha \in \mathscr{S}^{-1}T(X) \mid \alpha = \frac{x}{s} \ \textit{for some } x \in \mathscr{I}(X), s \in \mathscr{S}(X)\}$$

($^\forall X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$) と定義すると，$\mathscr{S}^{-1}\mathscr{I}$ は $\mathscr{S}^{-1}T$ のイデアルとなる．

(3) $\mathscr{S} \cap \mathscr{I} = \emptyset$ のとき，自然な同型

$$v\colon \mathscr{S}^{-1}T/\mathscr{S}^{-1}\mathscr{I} \xrightarrow{\cong} \bar{\mathscr{S}}^{-1}(T/\mathscr{I})$$

が存在する．ただし，$\bar{\mathscr{S}} \subseteq T/\mathscr{I}$ は $\mathscr{S}$ の射影 $T \to T/\mathscr{I}$ による像をあらわす．

G-不変飽和積閉集合を非零因子の全体にとることで，全商環の G-両変類似物が丹原関手に対しても得られる．すなわち

$$\mathfrak{Z} = \{s \in T(G/e) \mid s \text{ は非零因子 }\}$$

に対して半 Mackey 部分関手 $\mathscr{L}_{\mathfrak{Z}} \subseteq \mathscr{U}_{\mathfrak{Z}} \subseteq T$ が得られ，これらによる fraction をとることができる．

次のことが自明に成立．

命題 4.8. ([9, Corollary 7.8]) T が体状のとき，$\mathscr{L}_{\mathfrak{Z}}^{-1}T \cong \mathscr{U}_{\mathfrak{Z}}T \cong T$.

また，$\mathscr{U}_{\mathfrak{Z}}^{-1}T$ が体状となるための十分条件として次が挙げられる．

命題 4.9. ([9, Lemma 7.11, Proposition 7.12]) T を丹原関手とする．$T(G/e)$ が整域であり，次の二条件のうち少なくとも一方を満たすとき，$\mathscr{U}_{\mathfrak{Z}}^{-1}T$ は体状となる．

(i) T は MR 条件を満たす．

(ii) 推移的な任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し，$(\gamma_X)_+(1) \in \mathscr{U}_{\mathfrak{Z}}(X)$ が成立．ただし，$\gamma_X \in {}_G\mathrm{set}(G/e, X)$ とする．これは γ_X のとり方によらない．

とくに，$\mathscr{U}_{\mathfrak{Z}}^{-1}\Omega$ は体状となる．より詳しく，命題 3.10, 4.7 から次の丹原関手の同型が得られる．

命題 4.10. ([9, Proposition 7.17]) $\mathscr{U}_{\mathfrak{Z}}^{-1}\Omega \cong \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$.

5. 多項式環の G-両変類似と Dress 構成

モノイドから半群環という形で可換環が得られるのと同様に，丹原化により半 Mackey 関手から丹原関手を構成することができた．これを用いて，環から多項式環を得たように，丹原関手から「多項式環の G-両変版」を構成したい．まず雛形として，多項式環の性質を思い出してみる．

- 環 R 係数の一変数多項式環は $R[X] \cong R[\mathbb{N}] \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\mathbb{N}]$ で与えられる．
- 任意の R-代数 S に対して，自然な同型

$$R\text{-alg}(R[X], S) \xrightarrow{\cong} S\ ;\ \varphi \mapsto \varphi(X)$$

が存在．ここで，R-alg は R-代数の圏をあらわす．

定義 5.1. 固定された丹原関手 T に対し **T-丹原関手**とは，丹原関手 S と射 $\sigma \in \mathrm{Tam}(G)(T, S)$ の対 (S, σ) のこととし，しばしば S であらわす．T-丹原関手 $S = (S, \sigma)$ から $S' = (S', \sigma')$ への射は，丹原関手の射 $\varphi \in \mathrm{Tam}(G)(S, S')$ であって $\sigma' = \varphi \circ \sigma$ を満たすものとする．T-丹原関手の圏を T-$\mathrm{Tam}(G)$ とかく．Ω-$\mathrm{Tam}(G)$ は $\mathrm{Tam}(G)$ に他ならない．

丹原化とテンソルを組み合わせると，次が得られる．

命題 5.2. ([8, Theorem 2.5]) 任意の有限群 G に対して，関手

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Tam}(G) \times \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{Tam}(G)\ ;\ (T, M) \mapsto T \otimes_{\Omega} \Omega[M]$$

は次を満たす．

(i) G が自明のときは，$\mathcal{F}$ は係数つきの半群環をとる関手に一致．

$$\mathrm{Ring} \times \mathrm{Mon} \to \mathrm{Ring}\ ;\ (R, Q) \mapsto R[Q]$$

(ii) $T = \Omega$ のとき，任意の $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SMack}(G))$ に対して自然な同型 $\mathcal{F}(\Omega, M) \cong \Omega[M]$ が存在．

(iii) Q が有限 G-モノイドのとき，任意の丹原関手 $T \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Tam}(G))$ に対して自然な同型 $\mathcal{F}(T, \mathcal{P}_Q) \cong T_Q$ が存在．

(iv) 任意の T および M に対し，$\mathcal{F}(T, M)$ は自然に T-丹原関手となる．さらに，T を固定するとき誘導される関手

$$\mathcal{F}(T, -)\colon \mathrm{SMack}(G) \to T\text{-}\mathrm{Tam}(G)$$

は，次の合成関手の左随伴を与える．

$$T\text{-}\mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{Tam}(G) \xrightarrow{(-)^{\mu}} \mathrm{SMack}(G)\ ;\ (S, \sigma) \mapsto S^{\mu}$$

注 5.3. (iii) で T_Q は，丹原関手 T を Dress 構成を用いて有限モノイド Q でひねったものである．丹原関手の Dress 構成は [13] によりなされた．$T = \Omega$ の場合は斜 Burnside 関手に他ならない．

関手としては，有限 G-モノイドの圏を G-mon とかくとき，

$$\mathrm{Tam}(G) \times G\text{-mon} \to \mathrm{Tam}(G)$$

のようにあらわせる．ここで，G-mon $\hookrightarrow$ G-Mon $\overset{\mathcal{P}}{\hookrightarrow}$ $\mathrm{SMack}(G)$ なる忠実充満関手を考えると，(iii) は

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tam}(G) \times G\text{-mon} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\text{Dress 構成}"'] & \circlearrowleft & \mathrm{Tam}(G) \times \mathrm{SMack}(G) \arrow[dl, "\mathcal{F}"] \\
& \mathrm{Tam}(G) &
\end{tikzcd}$$

のようにあらわされ，関手 $\mathcal{F}$ と Dress 構成の関係をみることができる．

環の場合の類似を追うならば，丹原関手 T を係数とする「多項式環の G-両変類似物」の定義が期待できる．そのためには，$\mathrm{SMack}(G)$ における $\mathbb{N}$ の G-両変版を見つければよい．実際，各部分群 $H \leq G$ に対して，その候補となる半 Mackey 関手が次のように得られる．

命題 5.4. ([8, Theorem 4.11]) 任意の $H \leq G$ に対し，次の性質を満たす半 Mackey 関手 $\mathfrak{X}_H \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SMack}(G))$ が存在する．

($*$) 任意の 半 Mackey 関手 $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SMack}(G))$ に対し，自然な全単射

$$\mathrm{SMack}(G)(\mathfrak{X}_H, M) \cong M(G/H)^{N_G(H)/H}$$

が存在．

ここで，$N_G(H) \leq G$ は G における H の正規化群をあらわす．$H = G$ の場合は $\mathfrak{X}_G = \mathfrak{A}^{\alpha}$ となり，$H = e$ の場合は $\mathfrak{X}_G = \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ となる．

関手

$$pol_{\mathfrak{X}_H}=\mathcal{F}(-,\mathfrak{X}_H)\colon \mathrm{Tam}(G)\to\mathrm{Tam}(G)$$

をとり，$T\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Tam}(G))$ の像に対し $T[\mathfrak{X}_H]=pol_{\mathfrak{X}_H}(T)$ とあらわす．これは T-丹原関手であり，系として自然な全単射

$$T\text{-}\mathrm{Tam}(G)(T[\mathfrak{X}_H],S)\cong S(G/H)^{N_G(H)/H}$$

が任意の T-丹原関手 $S=(S,\sigma)$ に対し成立する．(とくに，G が自明な場合は一変数多項式環に一致．) これにより，$pol_{\mathfrak{X}_H}$ は一変数多項式環をとる関手の G-両変版とみなせる．

6. 今後の問題

素イデアルが定義されたので，丹原関手の次元はどうなるかという疑問が出てくる．多項式環の類似物も定義されているが，Hilbert の基底定理のようなものは成立するだろうか．Ω の次元と群 G の位数の関係はどのようになるだろう．あるいは，$Spec\,\Omega$ を完全に決定できるだろうか．

丹原関手上の「加群」をどう定義するかという問題も残されている．単純に T を monoid object とみなし，作用つきの Mackey 関手を加群と定義するならば，これは Green 関手 T^{α} 上の加群ということに他ならないが，丹原関手の射やイデアルとはあまり相性がよいとはいえない．

さらに [11] では，プロ有限群上の丹原関手について論じている．これら有限群上の丹原関手に対する代数的操作は，プロ有限群あるいは一般の群の Mackey 系 ([1]) 上の丹原関手にはどの程度拡張できるだろうか．

References

[1] Bley, W.; Boltje, R.: *Cohomological Mackey functors in number theory.* J. Number Theory **105** (2004) 1–37.

[2] Boltje, R.: *Mackey functors and related structures in representation theory and number theory*, Habilitation-Thesis, Universität Augsburg (1995).

[3] S. Bouc.: *Green functors and G-sets*, Lecture Notes in Mathematics, 1671, Springer-Verlag, Berlin (1977).

[4] Brun, M.: *Witt vectors and Tambara functors.* Adv. in Math. **193** (2005) 233–256.

[5] Dress, A.W.M.; Siebeneicher, C.: *The Burnside ring of profinite groups and the Witt vector construction.* Adv. in Math. **70** (1988), no. 1, 87–132.

[6] Jacobson, E.T.: *The Brauer ring of a field.* Illinois J. Math. **30** (1986), 479–510.

[7] Nakaoka, H.: *Structure of the Brauer ring of a field extension.* Illinois J. Math. **52** (2008), no. 1, 261–277.

[8] Nakaoka, H.: *A generalization of The Dress construction for a Tambara functor, and polynomial Tambara functors.* arXiv:1012.1911.

[9] Nakaoka, H.: *On the fractions of semi-Mackey and Tambara functors*, in press, J. Algebra (2012), doi:10.1016/j.jalgebra2011.11.013.

[10] Nakaoka, H.: *Ideals of Tambara functors.* arXiv:1101.5982.

[11] Nakaoka, H.: *Tambara functors on profinite groups and generalized Burnside functors.* Comm. Algebra **37** (2009) no. 4, 3095–3151.

[12] Nakaoka, H.: *Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt-Burnside construction.* Adv. in Math. **227** (2011) no.5, 2107–2143.

[13] Oda, F; Yoshida, T: *Crossed Burnside rings III: The Dress construction of a Tambara functor.* J. Algebra. **327** (2011) 31–49.

[14] Tambara, D.: *On multiplicative transfer.* Comm. Algebra **21** (1993), no. 4, 1393–1420.

[15] Tambara, D.: *Multiplicative transfer and Mackey functors.* manuscript.

[16] Yoshida, T.: *Polynomial rings with coefficients in Tambara functors.* (Japanese) Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 1466 (2006), 21–34.